



Estructuras de lecciones diseñadas según los principios de la enseñanza exploratoria por futuros profesores de Matemáticas

Paloma **Santonja** Serrano

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

paloma.santonja@ua.es

Mar **Moreno** Moreno

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

mmoreno@ua.es

Salvador **Llinares** Ciscar

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria cuando aplican los principios de la Enseñanza Exploratoria al planificar lecciones. Las planificaciones se analizaron considerando las tareas propuestas y la anticipación de los movimientos del profesor, lo que permitió identificar la estructura de estas. Los resultados muestran cuatro estructuras formadas por dos tipos de secuencias. Solo uno de los tipos de estructura favorecía la enseñanza exploratoria. Estos resultados indican que los principios de la enseñanza exploratoria son una herramienta conceptual eficaz para la planificación de lecciones pero difícil de aprender.

Palabras clave: Aprendizaje profesional; Enseñanza exploratoria; Estructura de lecciones; Formación de profesores de Matemáticas; Planificación de lecciones.

Introducción

Planificar lecciones es una práctica profesional específica del profesor fundamental para la enseñanza de las Matemáticas por lo que su aprendizaje es esencial en los programas de formación de profesores de Matemáticas (Cevikbas et al., 2024). Investigaciones recientes en Educación Matemática identifican características de las planificaciones realizadas por profesores en ejercicio y por futuros profesores (Ayalon et al., 2021; González et al., 2020; Ozyldirim-Gummus, 2020). Por ejemplo, Ayalon et al. (2021), en su investigación con profesores y futuros docentes de secundaria, indicaron su tendencia a usar tareas desafiantes en sus planificaciones. En cambio, González et al. (2020) señalaron que la mayoría los profesores participando en un programa de desarrollo profesional consideraban una estructura de la lección basada en presentar conceptos, poner ejemplos y proponer tareas de un libro de texto, a realizar en lápiz y papel; o bien, en el caso de Ozyldirim-Gummus (2020), con futuros profesores, las lecciones estaban centradas en el profesor y presentaban escasas conexiones de los conceptos matemáticos con la vida real.

Estos resultados muestran la necesidad de incluir en los programas de formación enfoques para planificar la instrucción que incidan en resolver problemas no rutinarios, analizar datos, formular hipótesis o comunicar resultados, es decir, siguiendo el método científico. Uno de estos enfoques es el modelo enseñanza exploratoria (Artigue & Blomhøj, 2013), que se apoya en prácticas matemáticas tales como generar y estudiar casos particulares, organizar sistemáticamente la información, buscar patrones y relaciones, conjeturar y generalizar (Moreno et al., 2024). Esta aproximación a la enseñanza determina en la formación de profesores la necesidad de crear oportunidades para que los estudiantes para profesor aprendan a realizar planificaciones de la lección usando los principios de la enseñanza exploratoria. En particular, cuando los estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria modifican tareas matemáticas, solo aquellos que usan consistentemente los principios de la enseñanza exploratoria definían como objetivos de aprendizaje prácticas matemáticas anteriores (Moreno et al., 2024).

En esta investigación ponemos el foco en cómo los estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria aplican los principios de la Enseñanza Exploratoria al planificar lecciones.

Marco conceptual

La enseñanza exploratoria es un modelo de enseñanza centrado en el estudiante, en el que se crean oportunidades para que éstos trabajen de forma similar a como lo harían matemáticos y científicos (Artigue & Blomhøj, 2013; Dorier y Mass, 2020). En este modelo de enseñanza se requiere que los estudiantes observen fenómenos, se hagan preguntas, busquen métodos matemáticos y científicos para dar respuesta a dichas preguntas (ej. llevar a cabo experimentos, controlar sistemáticamente las variables, dibujar diagramas, buscar patrones y/o relaciones; conjeturar y generalizar los resultados). El rol del profesor incluye usar constructivamente el conocimiento previo de los estudiantes, desafiarlos a través de preguntas efectivas y probatorias, manejar pequeños grupos y discusiones matemáticas que permitan a los estudiantes valorar distintos puntos de vista y conectar sus ideas (Artigue, 2017).

Aunque la enseñanza exploratoria no se diseñó específicamente para la enseñanza de las Matemáticas (Artigue & Blomhøj, 2013), guarda semejanzas con la exploración en ciencias (Artigue, 2017): (i) Se parte de una pregunta o problema abierto. Las respuestas se buscan a través de la observación e indagación mediante experimentos mentales. (ii) Se buscan conexiones con preguntas ya respondidas; aplicando y adaptando técnicas matemáticas conocidas. (iii) El proceso conduce a respuestas hipotéticas y conjeturas que requieren de validación, lo que implica revisar y cuestionar las definiciones de los objetos matemáticos implicados. (iv) El proceso puede llevar a formular nuevas preguntas o problemas, cuya respuesta podría influir en la formulación o respuesta a la pregunta inicial. En particular, en esta investigación concretamos los principios de la enseñanza exploratoria que se pueden evidenciar en la planificación de una lección como: (1) El profesor introduce un problema, una cuestión sugerente/desafiante, un experimento, etc. (puede provenir de una discusión surgida en el contexto del aula, del visionado de un vídeo, etc.). (2) Los estudiantes exploran el problema, hacen experimentos o pruebas, en un contexto de laboratorio, etc. No hay una explicación explícita de los contenidos matemáticos con los que se relaciona la tarea. (3) El profesor guía la exploración (4) A partir de las respuestas de los estudiantes, el profesor enseña el contenido. (5) El profesor favorece el proceso de generalización, pudiendo proponer otra tarea o una extensión de esta. (6) El profesor puede proponer una tarea de evaluación.

El desafío en la formación de profesores es crear oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan aprender a planificar la enseñanza de las Matemáticas reflejando estos principios de la enseñanza exploratoria. Además, se generan interrogantes sobre cómo se da el aprendizaje del estudiante para profesor del uso de estos principios para la planificación de la enseñanza.

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria (EPMS) cuando aplican los principios de la enseñanza exploratoria. En particular, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las características de la estructura de las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas para favorecer la enseñanza exploratoria?

Método

Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria (EPM) en un programa de formación de profesores de enseñanza secundaria en España. La formación previa de los participantes era variada: 5 ingenieros, 1 informático, 11 matemáticos, 7 físicos y 1 arquitecto.

Los EPMs participaron en una asignatura centrada en apoyar el desarrollo de la competencia docente vinculada a analizar tareas/problemas matemáticos, modificar y secuenciar tareas/problemas para apoyar la enseñanza exploratoria. Éstos recibieron información teórica sobre principios de la enseñanza exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013) y (ii) prácticas para orquestar discusiones productivas (Stein et al., 2008). Durante el curso, los EPMs resolvían prácticas profesionales en grupos de 4 o 5. Las prácticas profesionales consisten en registros de

la práctica (ej. transcripción de una interacción profesor-alumno, tarea de un libro de texto y descripciones de situación de enseñanza) y una serie de cuestiones que permiten a los EPMs estructurar su mirada sobre la situación y aplicar la información teórica proporcionada generando información adicional sobre la situación. Para la evaluación final de la asignatura los EPMs resolvieron una práctica individual como síntesis de todas las prácticas profesionales anteriores, en la que se solicitaba que planificaran una lección de cuatro sesiones para favorecer la enseñanza exploratoria de un contenido matemático específico. Este contenido podía ser: proporcionalidad, semejanza, teorema de Tales y escalas (3° -4° ESO); derivada de una función, propiedades y aplicaciones (1°-2° Bachillerato); identificación de regularidades de secuencias numéricas, sucesiones y series (3-4° ESO); sistemas de ecuaciones lineales e interpretación geométrica (3°-4° ESO). A los EPMs se les proporcionó un guion para elaborar la planificación de la lección (Figura 1).

PLANIFICACIÓN: Planifica una lección de una semana (4 sesiones aprox., que integre Tics) que te permita desarrollar el contenido elegido desde una enseñanza exploratoria. Indica: objetivos específicos, secuencia de tareas, aspectos específicos de la enseñanza exploratoria, y criterios de evaluación.

- Justifica por qué tu propuesta favorece la enseñanza exploratoria, y el papel que juegan las Tics.
- Justifica la situación de aprendizaje elegida: situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a las competencias específicas y a las competencias clave que contribuyen a su adquisición y desarrollo.

Anticipa una gestión de la discusión en gran grupo, según el modelo de Stein et al. (2008), mostrando las fases y ejemplificando las prácticas. Justifica la respuesta.

Figura 1. Guion para elaborar la planificación de la lección

Análisis

Los datos del estudio fueron las 25 planificaciones presentadas por los EPMs. El análisis de las planificaciones se realizó en dos fases. En la fase 1 analizamos el tipo de tareas y la anticipación de las acciones del profesor. Las tareas se analizaron según su propósito para el contexto de la lección y se identificaron cuatro tipos de tareas: aplicación, exploración, verificación, demostración. Las tareas de aplicación permitían aplicar conceptos/propiedades previamente explicadas por el profesor o exploradas por los estudiantes. Las tareas de exploración permitían estudiar alguna propiedad o concepto matemático, bien fuera estudiando casos particulares, buscando la generalización, estableciendo la falsedad de una relación o buscando contraejemplos. Las tareas de verificación permitían verificar propiedades/condiciones matemáticas dadas en el enunciado. Finalmente, las tareas de demostración permitían dar una demostración formal de un resultado o propiedad matemática.

En segundo lugar, analizamos la anticipación de las acciones del profesor en la planificación, identificando 6 acciones diferentes: explicaciones directas, explicaciones mediante discusiones, ejemplificaciones, resúmenes, síntesis, y guiar exploraciones. Las explicaciones directas eran fragmentos en los que los EPMs indicaban que el profesor explicaría los contenidos; las explicaciones mediante discusiones consistían en fragmentos de las planificaciones en los que los EPMs indicaban que el profesor, tras una exploración, pediría a los alumnos exponer las conclusiones y llegar a los conceptos. Las ejemplificaciones eran declaraciones explícitas de los EPMs del uso de ejemplos para clarificar. Los resúmenes eran fragmentos en los que los EPMs planeaban resumir los conceptos explicados durante una sesión.

Los “momentos de síntesis” eran fragmentos de la planificación en la que los EPMs proponían sintetizar los conceptos tratados en sesiones anteriores. Finalmente, “guiar exploraciones” eran fragmentos en los que los EPMs planeaban preguntas para monitorear la exploración, pistas para ayudar a los alumnos a deducir propiedades matemáticas o facilitaban la búsqueda de casos particulares. La manera de considerar la disposición en la planificación prevista de las tareas y las acciones permitió identificar diferentes “partes de la lección” definidas por los objetivos y las acciones pretendidas. Las “partes de la lección” se etiquetaron como: “motivar a los alumnos”, “proponer tareas de exploración”, “proponer tareas de aplicación”, “proponer tareas de profundización”, “realizar explicaciones directas con ejemplos”, “realizar explicaciones mediante discusión”, “recapitulaciones” y contenían tareas pretendidas y/o anticipación de las acciones del EPM (Tabla 1).

Tabla 1
Focos del análisis y categorías generadas en el plan de la lección

Partes de la lección	Tipos de tareas	Anticipación de las acciones
“motivar a los alumnos”	Aplicación o exploración (breves)	Momentos de síntesis
“proponer tareas de exploración”	Verificación (si el concepto no se había explicado) Exploración	Guiar la exploración
“proponer tareas de aplicación”	Aplicación Verificación (si el concepto ya se había explicado/explorado)	
“proponer tareas de profundización”	Exploración (basada en exploraciones previas) Demostración	
“realizar explicaciones mediante discusión”		
“realizar explicaciones directas con ejemplos”		Explicación directa Ejemplificaciones
Recapitulaciones		Resúmenes

La manera en la que estaban relacionadas las tareas propuestas y las acciones del profesor constituyen la estructura de la planificación. Las estructuras de las planificaciones las representamos mediante un diagrama en el que se muestra la distribución y orden de las tareas y diferentes acciones del profesor previstas en el plan de la lección (Figura 2).

En la fase 2 se compararon las estructuras de las planificaciones en un proceso 2 a 2. Este proceso consiste en comparar dos de ellas e identificar semejanzas y diferencias entre sí. A continuación, se selecciona una tercera planificación y se compara con las dos anteriores. Esta comparación permitió agrupar planificaciones con características similares e identificar sus características. Así, generamos cuatro tipos de planificaciones.

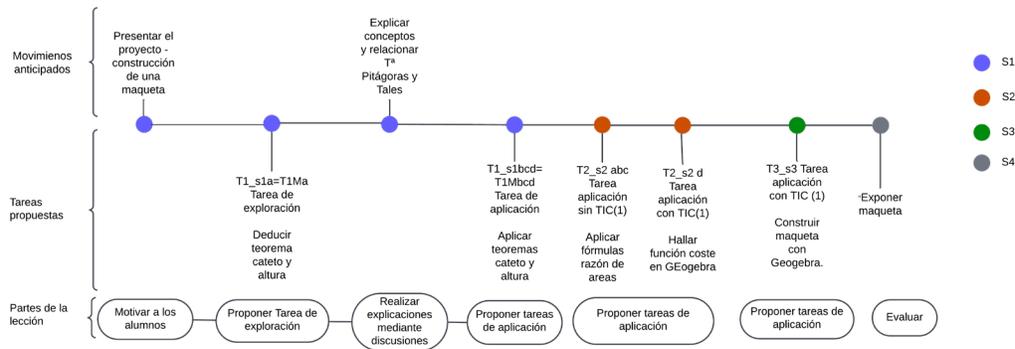


Figura 2. Estructura de la planificación de ST25 para curso 3º ESO, sobre aplicaciones de concepto semejanza en la construcción de maquetas

Resultados

Los resultados muestran cuatro tipos de estructuras (Tabla 2) que nos permiten considerar dos grandes grupos. En primer lugar, las que contienen secuencias de explicaciones directas con ejemplificaciones y tareas de aplicación, con tres variantes (tipo T1, tipo T1.1 y tipo T2). En segundo lugar, las planificaciones formadas por secuencias de tareas de exploración, seguidas de explicaciones mediante discusión, de tareas de profundización y/o tareas de aplicación (Tipo T3). En esta comunicación presentaremos las características de las secuencias que han permitido identificar los cuatro tipos de estructuras.

Tabla 2
Tipos de planificaciones según su estructura

Tipo	fi
T1. Secuencias de “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “recapitulaciones”	2
Subgrupo T1.1. Añaden “tareas de exploración”	3
T2. Secuencias de “explicaciones directas con ejemplificaciones” y/o “propuesta de tareas de aplicación” combinadas con “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “realizar explicaciones mediante discusión” y propuesta de “tareas profundización” o “tareas de aplicación”	12
T3. Secuencias de “propuesta de tareas de exploración”, “realizar explicaciones mediante discusión”, “propuesta de tareas de profundización” y/o “propuesta de tareas de aplicación”	7

(1) Secuencia de “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “recapitulaciones”

Esta secuencia aparece en las planificaciones de tipo T1, T1.1., T2. La evidenciamos con un fragmento de la planificación de EMP13 (tipo T2) sobre sistemas de ecuaciones lineales para 4ºESO. En esta planificación, el objetivo específico de la sesión 2 era aprender a resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Para ello, el EPM13 proponía iniciar la sesión explicando los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones mediante ejemplos y, a continuación, proponía una tarea (ejercicio 1.a) de aplicación de los métodos explicados, seguida

de dos tareas (1.b y 1.c) que favorecerían el razonamiento de los estudiantes sobre los métodos de resolución:

2º sesión. En la segunda sesión, se explicarán los métodos de resolución de sistemas tanto sustitución, como igualación, como reducción. Además, se pondrán distintos ejemplos de cada uno y se propondrá que los alumnos realicen el siguiente ejercicio:

1.a. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución, igualación y reducción:

$\begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - y = 9 \\ -6x + y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x - 2y = 16 \\ -2x + 4y = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x + y = 9 \\ -12x + 9y = -69 \end{cases}$
$\begin{cases} -4x + 9y = -19 \\ 5x - 9y = 17 \end{cases}$	$\begin{cases} -x - 2y = -5 \\ -5x - 3y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 5y = -14 \\ -3x + 7y = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 8y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$

1.b. ¿Puedes observar que método es más sencillo en cada sistema?

1.c. ¿Puedes encontrar una relación entre los sistemas que comparten método de resolución óptimo?

Esta secuencia pretende que el profesor explique los conceptos y los alumnos los apliquen y reflexionen sobre ellos en una tarea de aplicación (Cuestión 1a). Las cuestiones 1b y 1c permiten buscar relaciones entre los coeficientes para decidir qué método de resolución es más sencillo en cada caso. Parece aplicar parte del segundo principio de la enseñanza exploratoria “exploran el problema, hacen experimentos” (buscar relaciones entre los métodos de resolución óptimos). Sin embargo, los conceptos con los que se relaciona la tarea (métodos de resolución de sistemas de ecuaciones) han sido explicados previamente por el profesor y no se deducen propiedades matemáticas. Esto puede ser interpretado como que al diseñar estas secuencias los EPMs no aplican los principios de la enseñanza exploratoria.

(2) Secuencias de “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “explicaciones mediante discusión”, seguidas de “tareas de demostración o nuevas tareas de exploración” y/o “tareas de aplicación”

Estas secuencias aparecen en las planificaciones del tipo T2 y T3. La evidenciamos utilizando fragmentos de la sesión S1 de la planificación de EPM12 (tipo T4) sobre semejanza para 3º ESO. El objetivo de esta sesión era explorar el teorema de Thales. Para ello, se inicia la sesión proponiendo una tarea de exploración para buscar relaciones entre los segmentos de una configuración, en lápiz y papel, para deducir el teorema de Thales:

Se formarán grupos de 3 estudiantes, se les solicitará que dibujen dos rectas que se corten (r y s) y seguidamente dos rectas paralelas (p1 y p2) entre sí que corten a las dibujadas anteriormente. 2. Se le pedirá si pueden identificar qué relación existe entre los segmentos formados en las rectas secantes [...] (ST12, pp14)

A continuación, el EPM12 proponía una discusión con los estudiantes para tratar de formalizar el Teorema de Thales usando el libro de texto. Finalmente, el EPM proponía apoyar la generalización mediante un applet de GeoGebra que permite a los estudiantes comprobar el teorema para variedad de casos particulares:

Se desarrollará un debate entre los grupos para comprobar las relaciones obtenidas y otros casos particulares, como por ejemplo el recíproco del Teorema de Thales. Una vez determinadas las relaciones, se planteará entre todos el Teorema de Thales y se comparará con la definición que da el libro. “Finalmente, se les proporcionará un applet para practicar y comprobar de una manera más rápida con diferentes rectas secantes y rectas paralelas este teorema. (ST12, pp14)

Esta secuencia evidencia un uso estructurado de los principios de la enseñanza exploratoria: (1) plantear cuestión sugerente (buscar relaciones entre los segmentos dibujados), (2) buscar relaciones (conjeturar el teorema de Thales al investigar un caso particular) sin explicación previa, (3) explicar el teorema (los estudiantes exponen sus occlusiones y el profesor formaliza el teorema) (4) favorecer la generalización (al proporcionar un applet para que comprueben que el resultado es cierto en variedad de casos particulares).

Discusión y conclusiones

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones de lecciones realizadas por EPMs aplicando los principios de la enseñanza exploratoria. El análisis de las 25 planificaciones ha permitido identificar cuatro estructuras de planificaciones, formadas por secuencias de: (1) “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “ejemplificaciones” y (2) “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “realizar explicaciones mediante discusión”, seguidas de “propuesta de tareas de demostración o nuevas tareas de exploración” y/o “tareas de aplicación”. Los resultados muestran que 17 de 25 planificaciones contienen secuencias en las que no se usan los principios de la enseñanza exploratoria (Secuencias de (1)). Este resultado no es inesperado, y evidencia una tendencia de los EPMs a planificar lecciones o partes de éstas siguiendo un enfoque de enseñanza centrado en el profesor, en línea con los hallazgos de investigaciones previas (González et al. (2020), Ozyldirim-Gummus, 2020), a pesar de que las tareas permiten profundizar en conceptos matemáticos (Ayalon et al., 2021). Podemos interpretar la limitación de algunos EPMs para aplicar los principios de la enseñanza exploratoria como una dificultad en considerar como objetivos de aprendizaje las prácticas derivadas de la enseñanza exploratoria (Moreno et al., 2024). Además, las experiencias previas de los EPMs en contextos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas pueden explicar los objetivos de aprendizaje definidos (Moreno et al., 2024), dada la presencia del enfoque de enseñanza tradicional en el contexto español. En futuras investigaciones sería necesario profundizar en las características de las tareas propuestas e identificar cómo usan los principios de la enseñanza exploratoria al diseñar y secuenciar tareas en el contexto específico de las lecciones planificadas. Esta investigación ayudaría a clarificar cómo los EPMs interpretan la enseñanza exploratoria.

Reconocimientos

Este estudio ha sido apoyado por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-100, PID2020-116514GB-100, PR2021-097154).

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2017). ¿Qué es la educación matemática basada en la indagación? *La Gaceta de la RSME*, 20(3), 593-609.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-81 <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Ayalon, M., Naftaliev, E., Levenson, E. S., & Levy, S. (2021). Prospective and in-service mathematics teachers' attention to a rich mathematics task while planning its implementation in the classroom. *International journal of science and mathematics education*, 19(8), 1695-1716. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10134-1>

- Cevikbas, M., Koenig, J., & Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 101-113. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2>
- Dorier, J.L., & Maass, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. En S. Lerman (eds.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.384-388). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_176
- Gonzalez, M. J., Gomez, P., & Pinzon, A. (2020). Characterising lesson planning: A case study with mathematics teachers. *Teaching Education*, 31(3), 260-278. <https://doi.org/10.1080/10476210.2018.1539071>
- Moreno, M., Llinares, S., & Santonja, P. (2024). Prospective secondary mathematics teachers' use of inquiry-based teaching principles as conceptual tools when modifying mathematical tasks. *Journal on Mathematics Education*, 15(4), 1131-1154. <http://doi.org/10.22342/jme.v15i4.pp1129-1150>
- Ozyildirim-Gumus, F. (2022). Preservice elementary mathematics teachers' use of patterns and pattern problems when planning and implementing lessons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2152–2175. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1952325>
- Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>