El número como cantidad de magnitud en la enseñanza de los números enteros con modelos concretos

Alberto **Zapatera**
Universidad de Alicante
España
alberto.zapatera@ua.es
Àngela **Buforn**
Universidad de Alicante
España
angela.buforn@ua.es
Eduardo **Quevedo**
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
España
eduardo.quevedo@ulpgc.es
Rubén **Lijó**
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
España
ruben.lijo@ulpgc.es

Resumen

Aunque existen estudios epistemológicos que señalan que los números enteros surgen en el ámbito algebraico, habitualmente se introducen desde el ámbito aritmético por medio de los modelos concretos. En este trabajo, tras estudiar los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros, se analizan las respuestas de 148 estudiantes del Grado en Educación Primaria a un cuestionario sobre obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. Del análisis de las respuestas se infiere que la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos mantiene la consideración del número como cantidad de magnitud, adquirida en la Educación Primaria con los números naturales, lo que obstaculiza la aceptación y comprensión de los números enteros. Para superar el obstáculo, se requiere una ruptura con el pensamiento matemático de los estudiantes y un cambio hacia contextos algebraicos en la enseñanza de los números enteros.

Palabras clave: Matemática educativa; Educación superior; Formación docente inicial; Pensamiento algebraico; Pensamiento numérico.

Introducción

Las teorías cognitivas consideran el aprendizaje como un proceso de modificación de significados, en el que interaccionan los conocimientos a adquirir y los conocimientos previos. Estas teorías afirman que para aprender algo nuevo, a veces, es preciso modificar (Piaget, 1970), eliminar (Bachelard, 1948) o revisar (Brousseau, 1989) conocimientos previos que obstaculizan ese aprendizaje. Pero, si los conocimientos previos fueron útiles en su momento, los estudiantes se muestran reacios a eliminarlos y tratan de mantenerlos, dificultando la adquisición de los nuevos. A estos conocimientos previos que dificultan la adquisición de nuevos conocimientos, Brousseau (1989) los denominó obstáculos epistemológicos y los diferenció de los obstáculos ontogenéticos, que derivan de la naturaleza y del momento evolutivo del alumno, y de los obstáculos didácticos, que derivan de las elecciones didácticas del profesor o del sistema. La consideración del número como cantidad de magnitud adquirida en Educación Primaria con el estudio de los números naturales, posteriormente en Educación Secundaria, dificulta el aprendizaje de los números enteros, convirtiéndose así en un obstáculo epistemológico.

En esta comunicación se estudia si el obstáculo del número como cantidad de magnitud real persiste a lo largo del tiempo en estudiantes que han recibido la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos.

Marco teórico

Habitualmente, la enseñanza del campo numérico se inicia con los números naturales y racionales positivos en Educación Primaria. Posteriormente, tomando este conocimiento como base, se plantea el estudio de los números enteros en los primeros cursos de Educación Secundaria o, en algunas ocasiones, en los últimos cursos de Educación Primaria. A partir de este conocimiento, se estudian los números racionales y los números reales.

Los números naturales se presentan habitualmente como cantidades de magnitud y sus operaciones se asocian con las acciones de juntar, quitar, repetir o repartir; es decir, se estudian en un entorno aritmético y se justifica por la necesidad de modelizar situaciones concretas y reales. Para Brousseau (1989), la consideración de los números como objetos matemáticos que representan cantidades de magnitud, adquirida con los números naturales, presenta un obstáculo epistemológico en la enseñanza de los números enteros. En esta línea, Iriarte et al. (1991) consideran que “el gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia […] que identifica número con cantidad” (p. 13).

Históricamente los números enteros se han introducido desde enfoques memorísticos, inductivos, deductivos o constructivos, pero, actualmente se suelen presentar en un entorno aritmético apoyados en modelos concretos basados en el estudio de magnitudes opuestas.

Los modelos concretos son situaciones, cercanas a los estudiantes, que emplean magnitudes de dos sentidos (positivo y negativo) que son indicadas con los signos más y menos.

De esta manera, si estos signos con los números naturales significan una suma o una resta, con los enteros también pueden representar un estado o una cualidad. Si los signos se refieren a una suma o una resta, su significado es binario u operativo, y si se refieren a un estado o una cualidad, su significado es unario o predicativo.

Además, los modelos concretos pueden ser de neutralización y de desplazamiento. Los modelos de neutralización se contextualizan en situaciones como haberes y deudas, ganancias y pérdidas o fichas de colores que se neutralizan; y los modelos de desplazamiento se contextualizan en situaciones de temperaturas, movimientos del ascensor o ejes cronológicos.

La necesidad de representar magnitudes con dos sentidos, que se alega para utilizar los modelos concretos, es ficticia: ambos sentidos pueden diferenciarse, sin necesidad de utilizar signos, con números naturales debidamente contextualizados. Por ejemplo, +3 y -3 se pueden contextualizar, en el modelo de neutralización de ganancias-pérdidas, como “ganar 3” y “perder 3”, y en el modelo de desplazamiento del termómetro, como “3º por encima de cero” y “3º por debajo de cero”. Esta argumentación se puede extender a los problemas, donde la resolución aritmética con números enteros, con frecuencia, es más compleja y menos creíble que con números naturales. Desde esta perspectiva, la aritmética elemental ni necesita ni justifica la utilización de los números enteros.

En los modelos concretos se encuentran tanto situaciones de estructura aditiva como multiplicativa. En la estructura aditiva, el signo unario se refiere, en los modelos de neutralización, a los dos sentidos de la magnitud y, en los modelos de desplazamiento, se refiere a la posición, a la derecha o a la izquierda del cero. En los modelos de neutralización, el signo binario se refiere a las acciones de añadir o quitar, mientras que en los modelos de desplazamiento se refiere a desplazamientos a la derecha o a la izquierda.

Los modelos concretos pueden provocar errores en la estructura aditiva; por ejemplo, la expresión (-3) – (-2)puede interpretarse, en el modelo de neutralización tener-deber, que debe 3 y, aunque le perdonen una deuda de 2, aún sigue debiendo 3, es decir, (-3) – (-2) = -3; y en el modelo de desplazamiento en la recta, también podría interpretarse que la diferencia entre la posición -3 y la posición -2 es 1, es decir, (-3)–(-2) = 1.

La estructura multiplicativa, en los dos tipos de modelos, resulta compleja y alejada de la experiencia del estudiante, que, con frecuencia, no llega a comprender las reglas de los signos. Por ejemplo, en el modelo de neutralización con fichas de colores, (-3)·(-2) significa quitar 3 veces 2 fichas negativas, por lo que el signo menos de -3 sería binario y el de -2 sería unario; y en los modelos de desplazamiento, el signo del -3 significa un cambio de sentido y el del -2 un desplazamiento. En ambos modelos, la operación resulta confusa y difícil de comprender.

El orden en los modelos concretos obliga al estudiante a emitir juicios de valor en los que lo positivo siempre es mejor que lo negativo. En los modelos de neutralización es fácil entender que “tener” es mejor que “deber”, pero no es fácil entender que una ficha es mejor que otra por ser de un determinado color; tampoco es fácil de comprender en los modelos de desplazamiento, que un número sea mayor que otro porque está detrás de él, en el sentido definido como positivo.

De esta manera, aunque los modelos concretos "justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto" (Cid, 2015, p. 65), por lo que investigadores como Glaeser (1981) o Cid (2015) proponen su utilización, en determinados casos, en la estructura aditiva, pero no en la estructura multiplicativa, al considerar que pueden obstaculizarla comprensión de los números enteros.

Además, estudios epistemológicos señalan que la razón de ser de los números negativos proviene del ámbito algebraico (Cid et al., 2020) y que, históricamente, la aritmética ha supuesto un obstáculo para su aceptación y comprensión (Brousseau, 1989; Cid, 2015; Cid et al., 2020; Glaeser, 1981).

Si para Brousseau (1989) el obstáculo para la enseñanza de los números enteros es la consideración de los números como objetos matemáticos que representan una cantidad de magnitud, para González (1995), el obstáculo es la creencia que identifica número con cantidad. En la misma línea, Iriarte et al. (1991) consideran que la gran idea que obstaculizó "la aceptación y reconocimiento del número negativo es la creencia […] que identifica número con cantidad" (p. 13) y concretaron esta idea obstaculizadora en ocho obstáculos vinculados a la idea de número como cantidad de magnitud real: (1) el número como expresión de cantidad, (2) la suma como aumento, (3) la sustracción como disminución, (4) la multiplicación como multiplicación natural, (5) la división como división natural, (6) el orden de los negativos como orden natural, (7) ignorar el signo y (8) la identificación de los símbolos literales como números positivos.

En esta investigación nos centramos en el obstáculo del número como cantidad de magnitud real, que Glaeser (1981) denominó "estadio de las relaciones concretas", y que dificultó la aceptación del número entero como objeto matemático. Herrera (2021) considera que la concepción del número como representación de la realidad aún persiste en la enseñanza de los números enteros y Zapatera et al. (2024) consideran que su superación requiere un cambio en los procesos de enseñanza y una ruptura en el pensamiento matemático que el estudiante ha ido construyendo durante la Educación Primaria a partir de los números naturales.

Desde esta perspectiva, el objetivo de esta investigación consiste en estudiar si el obstáculo del número como cantidad de magnitud real persiste a lo largo del tiempo en estudiantes que han recibido la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos.

Metodología

En esta investigación han participado 148 estudiantes del 1º curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, que no habían recibido previamente una instrucción específica, en sus estudios de Grado, sobre los números enteros, por lo que sus conocimientos de los números enteros se remontaban, mayoritariamente, a los construidos en la Educación Secundaria desde el ámbito aritmético mediante los modelos concretos. El tipo de investigación llevada a cabo en este estudio es de investigación-acción ya que se busca mejorar la práctica docente a partir de tareas en formación inicial de maestros para fomentar el desarrollo personal y profesional de los participantes.

El cuestionario utilizado (Figura 2) recoge las ocho cuestiones que analizaron Iriarte et al. (1991) para estudiar los ocho obstáculos de la idea obstaculizadora "lo real como obstáculo".

Cuestionario estudiantes del 1º curso del Grado de Educación Primaria

1. ¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido –(-3)?
2. ¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?
3. ¿Es posible encontrar un número que restado de 7 dé 10?
4. ¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?
5. ¿Es correcta la siguiente división? $\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} -1 & 1 \end{array}$
6. ¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3?
7. -7 grados en Moscú y -3 en Budapest. Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?
8. Si *a* es positivo y *b* es negativo, *a* - *b* es un número positivo

Figura 2. Cuestionario utilizado en la investigación (Iriarte et al., 1991)

Se han analizado los datos agrupando las respuestas semejantes de cada cuestión en tres grupos: respuestas correctas, respuestas incompletas o sin justificar y respuestas incorrectas. Ejemplos de estas categorías se muestran en el apartado de resultados.

Resultados

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en cada una de las cuestiones que se han utilizado para analizar los ocho obstáculos definidos por Iriarte et al. (1991).

Tabla 1
Resultados del cuestionario sobre los ocho obstáculos definidos por Iriarte et al. (1991)

	Número de respuestas y porcentajes		
	Correctas	Incompletas	Incorrectas
Cuestión 1 (número como expresión de cantidad)	30 (20%)	9 (6%)	109 (74%)
Cuestión 2 (suma como aumento)	132 (89)	2 (1%)	14 (10%)
Cuestión 3 (sustracción como disminución)	67 (45%)	2 (1%)	79 (54%)
Cuestión 4 (multiplicación como multiplicación natural)	32 (22%)	2 (1%)	114 (77%)
Cuestión 5 (división como división natural)	3 (2%)	5 (3%)	140 (95%)
Cuestión 6 (orden de los negativos como orden natural)	132 (89%)	0 (0%)	16 (11%)
Cuestión 7 (ignorar el signo)	144 (97%)	0 (0%)	4 (3%)
Cuestión 8 (símbolos literales como números positivos)	42 (28%)	43 (29%)	63 (43%)
Total	73 (49%)	8 (5%)	67 (46%)

Los obstáculos que más dificultades han generado en los participantes han sido el número como expresión de cantidad (cuestión 1), la sustracción como disminución (cuestión 3), la multiplicación como multiplicación natural (cuestión 4), la división como división natural (cuestión 5) y la identificación de los símbolos literales como números positivos (cuestión 8).

En la primera cuestión, solo el 20% de los participantes ha encontrado una situación real que se ajusta a la expresión –(-3); unos escribiendo, por ejemplo, "me quitan una deuda de 3€", y otros, considerando"–(-3) = +3" y escribiendo una situación real a partir de +3, como, por ejemplo, "tengo 3€".En la mayoría de las respuestas incorrectas, los participantes reconocen que no pueden encontrar una situación real en la que tenga sentido la expresión y algunos han descrito situaciones como "debo 3 €".

En la segunda cuestión, la mayoría de los participantes, un 89%, ha sido capaz de encontrar el número -3, que sumado a 5 da -2; muchos de ellos, además, han justificado su respuesta escribiendo la suma "5+ (-3) = -2".

Menos de la mitad de los participantes, el 45%, ha sido capaz de encontrar, en la tercera cuestión, el número -3, que restado de 7 da 10; casi todos ellos, además, han escrito la resta. "7 – (-3) = 10". Sin embargo, casi otra mitad ha considerado el 7 como sustraendo, en lugar de minuendo, y han contestado que el valor requerido es 17, porque "17 – 7 = 10".

Solo el 22% de los participantes ha encontrado, en la cuarta cuestión, un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero, escribiendo múltiplos negativos, "-5, -10,…". El 25% ha escrito el número 1 y casi todos los demás han reconocido que "no se puede" o que "no existen".

Solo un 2% ha reconocido, en la quinta cuestión, la posibilidad de que existan restos negativos justificándolo con la prueba de la división, "4 · 1 + (-1) = 3". El resto ha contestado que no es correcta y, muchos de ellos han afirmado que "el resto no puede ser negativo".

En la sexta cuestión, casi todos los participantes, el 89%, han contestado que el -2 es una unidad mayor que el -3, y algunos lo han justificado escribiendo "-3 + 1 = -2".

El 97% de los participantes ha reconocido, en la séptima cuestión, una subida de temperatura desdelos -7º C de Moscú, a los -3º C de Budapest.

Finalmente, en la última y octava cuestión, el 28% ha considerado correcto que "si a es positivo y b es negativo, a – b es positivo" justificándolo numéricamente, "4 – (-2) = 6", o con letras, "a – (-b) = a + b"; otro 29%, aunque ha contestado que sí es correcto, pero no ha justificado la respuesta. La mayoría de los que han contestado que la expresión es incorrecta, consideran que "depende de los valores de a y de b".

Conclusiones

Para superar el obstáculo del número como expresión de cantidad es preciso comprender los significados que puede tener el signo menos, y pocos participantes han demostrado ser capaces de hacerlo. Además, con frecuencia, las expresiones con números negativos son artificiales y alejadas de la realidad, y pueden ser sustituidas por otras más sencillas con números naturales (Martínez et al., 2022), por lo que los números negativos, a veces, son difíciles de concebir desde el plano real.

Aunque la mayoría de los participantes entiende que la suma no siempre significa aumentar, algunos aún continúan con la concepción, adquirida con los números naturales, de la suma como acción de añadir una cantidad a otra y consideran que el resultado de una suma siempre debe ser mayor que los sumandos (Bishop et al., 2014). Pero, si en los números naturales sumar y restar tienen significados contrarios, en los enteros una misma situación puede representarse de dos formas distintas; por ejemplo, ganar 3 equivale a perder -3 y perder 3 equivale a ganar -3. Los modelos concretos no evidencian esta relación y mantienen la consideración de que sumar es añadir y restar es quitar, por lo que los estudiantes conciben la suma como un aumento y la resta como una disminución. Más de la mitad de los participantes continúa asociando la resta con la acción de quitar, por lo que consideran que el resultado siempre debe ser menor que el minuendo (Bishop et al., 2014). Muchos estudiantes extienden la propiedad conmutativa de la suma a la resta para que el minuendo sea mayor que el sustraendo como con los números naturales (Peled et al., 1989); es decir, operan con los números enteros como lo harían con los naturales (Martínez et al., 2022).

Muchos participantes aún conciben la multiplicación de los enteros como la de los naturales, de forma que el producto siempre será mayor que los factores y positivo (Bell et al., 1981). Desde el entorno aritmético de los modelos concretos no tiene cabida la regla de los signos de la multiplicación, en especial que el producto de dos números negativos sea un número positivo, lo que dificulta la comprensión de su estructura multiplicativa. Aunque los participantes están habituados a dividir números negativos, casi todos conciben la división como división natural, es decir, como reparto de una cantidad en la que el resto es la cantidad sobrante, por lo que no puede ser negativo.

La mayoría de los participantes han encontrado el número que es una unidad mayor que un número negativo; es decir, son capaces de reconocer el orden de los negativos, aunque pocos justifican su respuesta. Sin embargo, González (1995) sostiene que el orden de los enteros es un orden total y que los modelos concretos inducen dos órdenes parciales y opuestos. Los participantes están familiarizados con los problemas aditivos con números enteros y con los modelos de desplazamiento, especialmente con el de temperatura, por lo que casi todos reconocen los signos de las dos temperaturas y las comparan correctamente. La mayoría de los participantes identifica las letras con valores positivos, confirmando su tendencia a asignar solo números naturales a los símbolos y a tratar expresiones del tipo -b únicamente como cantidades negativas (Lamb et al., 2012).

A partir de estas conclusiones, se infiere que la enseñanza de los números enteros a través de los modelos concretos no justifica la necesidad de los números negativos y mantiene la consideración del número como cantidad de magnitud real. Así pues, consideramos que la idea del número como cantidad de magnitud real adquirida en la Educación Primaria persiste en el pensamiento matemático de los futuros docentes después de 5 o 6 años de enseñanza de los números enteros con modelos concretos.

Por otra parte, los números naturales surgen en el ámbito aritmético de la necesidad de modelizar el mundo real, pero los enteros surgen en el ámbito algebraico de la necesidad de resolver ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras. Considerando lo anterior, se evidencia que la enseñanza de los números enteros desde el ámbito aritmético puede obstaculizar su aceptación y comprensión (Brousseau, 1989; Cid, 2015; Cid et al., 2020; Glaeser, 1981). Consideramos también que, aunque la resolución de determinadas situaciones aditivas con números enteros puede iniciarse a través de los modelos concretos, es en el ámbito algebraico donde se pueden superar los obstáculos que plantea la enseñanza de los números enteros. Desde esta perspectiva, es fundamental continuar con las investigaciones actuales (i.e. Cid et al., 2020; Detzel et al., 2021; Martínez et al., 2022) en las que, a partir delas habilidades de cálculo aritmético que poseen los estudiantes, sea posible, "mediante rupturas, hacerlos evolucionar hacia nuevos conocimientos propios del álgebra" (Detzel et al., 2021, p. 53). De este modo, la investigación presentada en esta comunicación tiene un aporte a la educación matemática ya que muestra evidencias de la necesidad de un cambio hacia contextos algebraicos en la enseñanza de los números enteros.

Referencias y bibliografía

Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI Editores.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operations in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 399–420. https://doi.org/10.1007/BF00308139

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 19-61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0019

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz, & C. Garnier (Eds.), *Construction des Savoirs Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). Les éditions Agenced'Arc.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *22*(4), 646–660. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p.646-660

Detzel, P., Ruiz, M. E. y Colipe, E. (2021). Una construcción de las reglas de cálculo de los números enteros a partir de la manipulación de expresiones algebraicas.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 303-346.

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Herrera, E. E. (2021). Implementación de herramienta m-learning para el aprendizaje de adición de números enteros en tiempos de pandemia. *Revista Universidad y Sociedad*, *13*(6), 99-108. . http://ref.scielo.org/2x3tps

Iriarte, D., Jimeno, M., y Vargas, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, *7*, 13-18.

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). Informing Practice: Developing Symbol Sense for the Minus Sign: research matters for teachers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(1), 5-9. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.18.1.0005

Martinez, R., Ruiz, M. E., Barrio, E., Benarz, N., Cid, E., Colipe, L., Detzel, P., Núñez, E.I., Morari, R, Petich, A., & Zambrano, A. (2022). *Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros*. Editorial de la Universidad Nacional del Comahue.

Peled, I., Mukhopadahyay, S., & Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. En G. Vergnaud, J. Roglaski, & M. Artique, *Proceedings of the 13rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 106-110). *PME*.

Piaget, J. (1970). Piaget's theory. En P.H. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology.* John Wiley and Sons, Inc. 703-732. Trad. cast, de M. Serigos en 1981 en *Monografía de Infancia y Aprendizaje*, 4(2), 13-54. https://doi.org/10.1080/02103702.1981.10821902

Zapatera, A., Quevedo, E., González, S., Santana, A., y Álamo, J. (2024). Obstáculos y dificultades de los alumnos en la incorporación de los números enteros. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática*, *26*, 41-63. https://doi.org/10.35763/aiem26.4725