
# Modelación de problemas elementales de Dirichlet con GeoGebra: Una propuesta didáctica en variable compleja basada en modelos

José **Saquimux**
Universidad de San Carlos
Guatemala
jsaquimux@yahoo.co.uk

**Resumen**

Presentamos una propuesta didáctica basada en un modelo constructivo visual desarrollada en el ambiente dinámico de GeoGebra para comprender y resolver problemas elementales de Dirichlet en contexto de electrostática 2D. En el modelo se usan ideas de mapeo conforme de variable compleja de ingeniería. Sustentamos su creación y aplicación apoyados en la teoría de enseñanza y aprendizaje de matemática basada en modelos. Describimos y ejemplificamos su construcción y su uso didáctico. Observaciones cualitativas preliminares indican mejoras en la comprensión para algunos estudiantes y el impacto positivo del uso de GeoGebra. Sugerimos la propuesta como apoyo o complemento a enfoques algebraicos tradicionales Al final discutimos algunas bondades, limitaciones y dificultades didácticas.

*Palabras clave*: Aprendizaje centrado en modelos; GeoGebra; Ingeniería; Mapeo conforme; Problema de Dirichlet; Variable compleja.

**Introducción**

La enseñanza de resolución de problemas elementales de Dirichlet para la ecuación de Laplace[1], estudiados en cursos de variable compleja de ingeniería eléctrica (en nuestro medio), en general; se realiza con métodos algebraicos tradicionales de la teoría de mapeo conforme (Schinzinger y Laura, 2003, pp. 33-59. Zill y Shanahan 2011, pp. 200-203, 389-390) [2]

[1] Encontrar una función armónica en un dominio bidimensional que cumpla ciertas condiciones de frontera.
[2] También está el enfoque analítico (no estudiado en el curso) propuesto por Coffie, R. (2023)

En nuestra experiencia docente de este tema, hemos observado que tales enfoques analítico-algebraicos de enseñanza tradicional, para varios estudiantes presenta obstáculos y conflictos de aprendizaje. Tales dificultades obstaculizan la comprensión de su naturaleza, resolución y aplicación en ingeniería eléctrica.

Intentando minimizar esta problemática de aprendizaje, y tratando de ayudar a los estudiantes con una mejor comprensión y resolución de estos problemas, como complemento a enfoques algebraicos, estamos ensayando la puesta en acción en nuestro curso de variable compleja, una estrategia de enseñanza y aprendizaje, basada en la construcción, exploración y uso de modelos visuales y dinámicos, utilizando GeoGebra (www.geogebra.org) como herramienta tecnológica base.

Para fundamentar nuestra propuesta, intentamos aplicar principios teóricos generales de enseñanza y aprendizaje de matemática basada en modelos usando GeoGebra que proponen Bu et al. (2011). Estos investigadores aconsejan centrar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la construcción y exploración de modelos matemáticos dinámicos, utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica principal. Estos modelos podrían incluir el uso interrelacionado de representaciones matemáticas y actividades interactivas en las que los estudiantes coparticipen activamente en su proceso de aprendizaje. Se espera que estas características didácticas fomenten la construcción y uso de modelos mentales dinámicos en los estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda de las ideas matemáticas en cuestión.

El objetivo central de esta comunicación es compartir una propuesta didáctica basada en un modelo visual interactivo, desarrollado en el contexto de electrostática 2D, para la comprensión y resolución de problemas elementales de Dirichlet con variable compleja en el entorno dinámico de GeoGebra. Así en este escrito, describimos algunos principios teóricos generales de la enseñanza de la matemática centrada en modelos que usamos para orientar nuestros ensayos de propuesta, describimos y caracterizamos la propuesta y, al final señalamos y discutimos algunas observaciones, bondades y problemas pedagógicos observados o que creemos que puedan generarse al ponerlo en acción en la enseñanza habitual de variable compleja de ingeniería en nuestro medio.

## Sustento teórico

Interesados en mejorar la calidad de enseñanza de variable compleja y motivados por trabajos desarrollados en GeoGebra, sobre visualización dinámica de mapeos en análisis complejo (Flashman, 2022), hemos estado ensayando el uso de GeoGebra como una herramienta digital en la enseñanza de variable compleja de ingeniería. En particular para favorecer la comprensión y resolución de problemas elementales de Dirichlet aplicado a electrostática.

En nuestro intento de sustentar y orientar el uso reflexivo de GeoGebra en la enseñanza de variable compleja, como docentes usuarios de teorías en educación matemática, nos apoyamos en el marco teórico preliminar propuesto por Bu et al. (2011) para una enseñanza aprendizaje de la matemática centrado en modelos usando GeoGebra. En su marco teórico, dichos autores retoman ideas de matemáticas dinámicas atribuidas a Kaput, (1992) y Moreno-Armella et al. (2008), quienes, según ellos, promueven el uso de representaciones dinámicas múltiples, la vinculación dinámica entre dichas representaciones múltiples, y la integración de tecnologías dinámicas e interactivas como infraestructura natural para la vinculación automatizada de representaciones (Bu et al. 2011 p. 19). Así también mencionan que su marco se basa en principios teóricos de educación matemática realista, propuesto por Freudenthal, (1973); Streefland, (1991) y Treffers, (1987), en el aprendizaje facilitado por modelos de Milrad et al., (2003) y, además, en la teoría de la génesis instrumental desarrollada por Guin et al. (2005). En base a esta fundamentación teórica, Bu et al. (2011 p. 15) consideran que el entorno tecnológico de GeoGebra puede usarse como herramienta efectiva para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas basado en modelos.

En su modelo de enseñanza, Bu et al. (2011, p. 13) proponen una definición operativa de comprensión matemática: "como la capacidad de tener un modelo mental dinámico que permita a un individuo [estudiante] simular mentalmente las relaciones estructurales de la idea matemática en múltiples representaciones, con el fin de realizar inferencias y predicciones".

En relación con la compresión de una idea matemática, construcción y uso de modelos mentales dinámicos, y la integración de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, Bu et al. (2011, p. 19) resumen:

> Nuestra comprensión de una idea matemática depende de un modelo mental viable que capture sus relaciones estructurales y los procesos correspondientes. Dada la complejidad de las matemáticas, es esencial que los estudiantes interactúen con sus múltiples representaciones y las construyan. Estas representaciones múltiples pueden construirse y manipularse por separado y también coordinarse dinámicamente mediante tecnologías de aprendizaje emergentes, como GeoGebra, en un entorno que apoya las coacciones entre el estudiante y las representaciones matemáticas.

Mencionemos brevemente las principales características para el diseño instruccional facilitado por modelos para las matemáticas dinámicas, que proponen. De las recomendaciones de matemáticas dinámicas y educación matemática realista; realizar un análisis de la fenomenología didáctica de la idea matemática, considerando sus conexiones estructurales y sus relaciones históricas, realistas y formales; la consideración de herramientas computacionales de modelación y simulación que favorecen la presencia de representaciones múltiples dinámicas e interactivas. Aplicar principios de la matemática facilitada por modelos, en los que se proponen modelos de representación y estructura múltiple que promuevan en el estudiante la exploración interactiva, matematización, el tratamiento de la complexidad y la operación coordinada del sistema tarea matemática-herramienta tecnológica de la génesis instrumental. En la secuencia de enseñanza, sugieren proponer modelos en los que los estudiantes tengan la oportunidad de examinar y modificar su actividad en los mismos, desarrollar una comprensión cada vez más abstracta y tomar decisiones fundadas en situaciones problemáticas; y promover entornos de modelado con comprensión cíclica cada vez más altas.

Considerando la definición de comprensión e ideas didácticas anteriores, creemos que se pueden construir modelos visuales en el entorno dinámico GeoGebra para ayudar a los estudiantes la comprensión y resolución de problemas de Dirichlet en variable compleja de ingeniería, aplicando algunos principios básicos de educación matemática realista y matemática facilitada por modelos. Modelos en los que se trata de darle sentido al problema en sí, y conjuntamente, a las ideas de variable compleja detrás de este problema. Modelos por medio de los cuales se resuelve y comprenda el problema, se evalúe la comprensión del estudiante, se use como modelo conceptual, y complemente tratamientos algebraicos tradicionales en variable compleja.

## Descripción y generalidades de la propuesta

En variable compleja de ingeniería, los problemas elementales de Dirichlet se presentan en problemas concretos de flujo de calor, de electrostática en 2D (Zill y Shanahan, 2011, pp. 386-390), o de otras cantidades eléctricas en 2D (Levi, 2023, 2024). Proponemos un modelo en contexto de electrostática en 2D. En su comprensión y resolución se presentan conceptos, representaciones y relaciones entre ellas, así como procedimientos específicos de teoría de electrostática y su relación con funciones armónicas y funciones analíticas (Zill y Shanahan, pp. 144-153, pp. 386-390). El modelo aplica para problemas electrostáticos ideales en 3D reducibles a 2D con valores concretos en las condiciones de frontera que se pueden modelar en GeoGebra. Para aplicar el modelo es necesario que el estudiante posea conocimientos elementales sobre mapeos conformes, mapeos con GeoGebra, y de electrostática elemental en 2D.

### Sistema electrostático y actividades de aprendizaje

Consideremos dos placas rectangulares verticales de dimensiones infinitas separadas una distancia $d$ y mantenidas a potencial $V_2 = 0$. Un cable circular vertical de longitud infinita que corre entre las placas con potencial $V_1 > 0$ está localizado a una distancia $a < d$ de una de las placas. Suponiendo que el radio del cable es muy pequeño comparado con la distancia entre las placas. (adaptado de Ganguli, 2008) Les pedimos a los estudiantes: (a) Revisar sus conocimientos de electrostática elemental y elaborar un prototipo concreto aproximado (tanque de aceite, electrodos y semillas) que simule el sistema electrostático, y usarlo para realizar un análisis físico-cualitativo que permita estimar y explicar la distribución del potencial y campo electrostático entre las placas, vistos en 3D y 2D, (b) con orientación guiada, construir un modelo visual de la red de curvas ortogonales equipotenciales y líneas de fuerza en 2D con GeoGebra que ilustre el uso de conceptos y procesos de variable compleja involucrados, y (c) usar el modelo para explorar y responder preguntas que ayuden a mejorar su comprensión de problemas de Dirichlet con variable compleja.

#### *Simulación concreta y estudio físico cualitativo*

En esta etapa, usando conocimiento de electrostática elemental y su prototipo concreto, papel y lápiz, pretendemos propiciar discusión guiada entre estudiantes relacionada con sus ideas previas que poseen sobre la naturaleza física del sistema en 3D en términos de superficies equipotenciales-fuerza ortogonales en el espacio y su equivalente en 2D en términos de curvas equipotenciales-fuerza ortogonales en el plano complejo. Apoyados del prototipo concreto, les pedimos que expliquen, propongan y justifiquen sus estimaciones o inferencias sobre la distribución del potencial en términos de curvas equipotenciales, líneas de fuerza y campo electrostático en 2D del problema propuesto en 3D. Estimaciones que posteriormente deben contrastarse como el modelo a construir.

### *Construcción del modelo con GeoGebra*

Para comprender el escenario del problema y su resolución en 2D proponemos construir un modelo en GeoGebra con guía orientada del profesor. Iniciamos usando redondeo de 4 cifras decimales, generemos deslizadores para poder variar las condiciones de frontera, $3 \leq d \leq 6, 1 \leq a \leq d - 0.5$, con incrementos de 0.5, y $-5 \leq V_2 \leq 0$, $0 \leq V_1 \leq 10$, con incrementos de 0.1. Seleccionando, $d = 3$, $a = 2$, $V_1 = 10$ y $V_2 = 0$ y suponiendo que el cable pasa en $(0, 2i)$, dibujamos el dominio físico del plano $z$ en la Vista gráfica 1 y sus condiciones de frontera que muestra la figura 1. Las placas representadas como rectas horizontales $y = 0$ y $y = 3$, el cable como el punto $(0, 2i)$ en el plano complejo.

Les proporcionamos la función $w = \frac{1}{e^{\pi z/d} - e^{-i\pi a/d}} + \frac{i}{2\sin(\pi a/d)}$, con $a = 2$ y $d = 3$, la cual es analítica en este dominio. Con esta función y el comando lugar geométrico mapeamos la frontera del dominio de la Vista gráfica 1, en el dominio coaxial de la Vista gráfica 2, mostrada en la Figura 1.

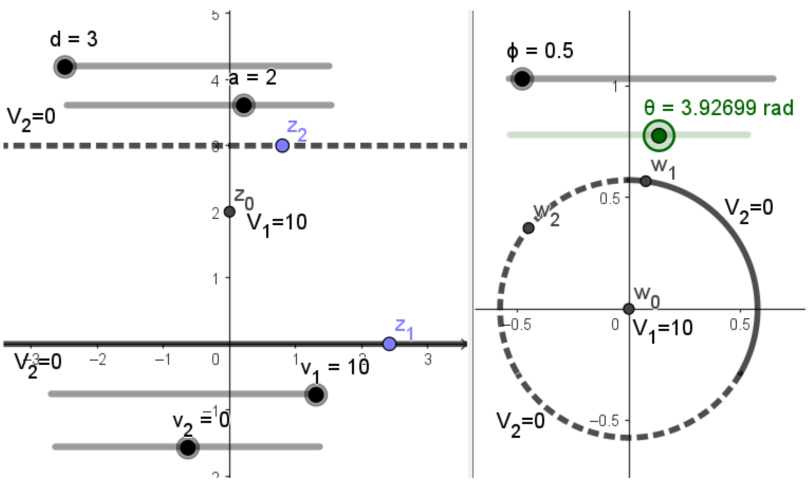


*Figura 1*. Dominio original plano $z$, Vista 1. Dominio coaxial plano $w$, Vista 2.

El punto $(0, 2i)$ se mapea en el punto $w = 0$, la recta $y = 0$ se mapea en el arco de línea continua, y la recta $y = 3i$ se mapea en el arco de línea discontinua, ambos arcos con igual radio. Cuando hacemos que $z_1 = x \to +\infty$, sobre ele semieje real positivo, vemos en la Vista 2 que $w_1$ tiende sobre el arco circular en el primer cuadrante a un punto sobre el eje imaginario, en la función del mapeo vemos que $w \to i/2\sin(\pi 2/3)$, por lo que radio del arco deber $R = \frac{1}{2\text{sen}(2\pi/3)} = 0.5773$.

Con esta transformación, definimos el problema en el dominio de la Vista gráfica 2. Tenemos un dominio coaxial, un círculo de radio $r_2 = R$ a potencial $V_2 = 0$ y un círculo de radio $r_1 \ll R$ a potencial $V_1 = 10$ concéntricos en el origen. Por simetría las líneas equipotenciales son círculos concéntricos. La función potencial que resuelve este problema es

$\phi = \frac{(V_2 - V_1)\ln r + V_1 \ln r_2 - V_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$, de la cual, podemos expresar el radio de los círculos equipotenciales en términos de $\phi$: $r(\phi) = \exp\left[\frac{\phi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + V_2 \ln r_1 - V_1 \ln r_2}{V_2 - V_1}\right], 0 \leq \phi \leq 10.$

Creamos el deslizador $V_2 \leq \phi \leq V_1$ con incrementos de 0.5, estos son los valores constantes que definen los círculos equipotenciales, tomando $r_2 = 0.5773$ como radio exterior del dominio, y proponemos $r_1 = 0.01$ como radio interior del dominio, con la ecuación $x^2 + y^2 = [r(\phi)]^2$, al deslizar $\phi$ generamos una familia de circunferencias equipotenciales con $V_2 \leq \phi \leq V_1$ en la Vista gráfica 2.

Para las líneas de fuerza, definimos el deslizador $0 \leq \theta \leq 2\pi$ con incrementos de $\pi/8$, tomando como punto inicial $r_1 e^{i\theta}$ y punto final $r_2 e^{i\theta}$, con el comando segmento generamos la familia de segmentos de líneas de fuerza en la Vista gráfica 2.

Esta red ortogonal en la Vista 2, es imagen de la red ortogonal preimagen de la Vista gráfica 1 bajo la función analítica $w = f(z)$. Por lo que la red ortogonal en la Vista gráfica 1 (por construirse) debe ser imagen de la red ortogonal en la Vista gráfica 2 bajo el mapeo de la función inversa $z = f^{-1}(w)$.

Construimos la función inversa de $w = f(z)$, la cual es, $z = \frac{d}{\pi}\ln\left(\frac{2i \operatorname{sen} \pi a/d}{2wi \operatorname{sen} \pi a/d + 1} + e^{-i\pi a/d}\right)$. Con esta función y el comando lugar geométrico mapeamos una circunferencia equipotencial y una línea fuerza de la Vista grafica 2 a la Vista gráfica 1, obteniendo una curva equipotencial y una línea de fuerza en la Vista gráfica 2.

Con el comando rastro, deslizando $\phi$ y $\theta$ podemos generar redes curvas en ambas vistas. Visualizamos que la red de curvas equipotenciales mapeadas en la Vista gráfica 1 cumple las condiciones de frontera, y que las redes de curvas equipotenciales y de fuerza son ortogonales. La red de curvas en la Vista gráfica 2 representan funciones armónicas, dado que un mapeo analítico transforma funciones armónicas en funciones armónicas, concluimos que la red en la Vista gráfica 1, representan las gráficas de funciones armónicas. Por lo que la red de curvas equipotenciales (línea continua) y líneas de fuerza (línea punteada) en el dominio resuelven visualmente el problema de Dirichlet propuesto.

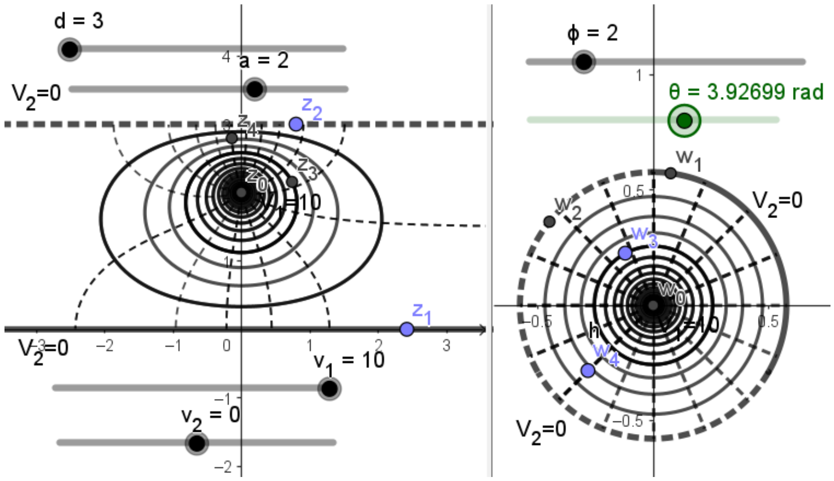


*Figura 2*. Redes ortogonales de equipotenciales y líneas de fuerza.

### *El modelo como herramienta de aprendizaje cooperativo*

Con el modelo construido le solicitamos realizar algunas actividades de investigación o exploración interactiva-cooperativa, sobre conceptos físicos y matemáticos, y procedimientos relativos al problema, que apoyen a mejorar su comprensión del fenómeno, naturaleza del problema y su resolución. Entre ella mencionamos algunas

- Comparar y discutir sus estimaciones cualitativas iniciales establecidas del prototipo concreto con el modelo construido.
- Con argumentos visuales, de electrostática en 2D y3D, y variable compleja, explorar, estimar y explicar las relaciones entre curvas equipotenciales y de fuerza, mapeos analíticos usados, funciones armónicas, función potencial compleja, campo electrostático y el cumplimiento de la ecuación de Laplace,
- Proponer un procedimiento algebraico para establecer la representación algebraica de las curvas equipotenciales a partir del procedimiento de construcción del modelo.
- Elaborar la secuencia de pasos del procedimiento para construir el modelo en general con GeoGebra, y
- Discutir sobre la utilidad del modelo en la comprensión y resolución del problema.

Esperamos que las actividades anteriores justifiquen la necesidad de fundamentar y formalizar contenidos de variable compleja necesarios para comprender y resolver estos problemas.

## Discusión y conclusiones

Nuestra propuesta se enfoca en centrar la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de variable compleja relativos a problemas elementales de Dirichlet, en la construcción y exploración de modelos matemáticos en el contexto realista de electrostática utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica principal. Entre sus bondades pedagógicas señalamos. Está basada en fenómenos observables o experimentables de electrostática elemental 2D, lo que permite a los estudiantes relacionar su experiencia o intuición con ideas electromagnéticas, funciones analíticas, funciones armónicas y procesos de mapeos conformes en variable compleja. Creemos que pueden proporcionar un marco referencial para dar sentido a dichos conceptos y procedimientos. Además, puede promover o fomentar la construcción significativa y progresiva de modelos analíticos-algebraicos para describir y analizar problemas elementales de Dirichlet con variable compleja.

Siguiendo recomendaciones de matemática dinámica, el modelo intenta proporcionar conexiones entre una variedad de ideas en contextos de electrostática 2D y variable compleja en sus distintas representaciones ejecutables en el modelo de GeoGebra como en la mente del estudiante. Incluye representaciones visuales interactivas y dinámicas, actividades orientadas de exploración y, discusiones en coparticipación estudiantil. Con ello esperamos fomentar una comprensión más profunda de los conceptos de variable compleja implicados.

En cuanto a su puesta en acción, por ahora su realización es inicial e informal. Lo hemos propuesto como proyectos para entregarse a largo plazo en un trimestre. Los modelos se construyen en grupos de tres integrantes. El profesor proporciona una guía para la construcción y la orienta. Al final cada estudiante presenta su trabajo y es evaluado.

Falta por realizar una experimentación específica o detallada sobre sus bondades y dificultades en el aprendizaje. Sin embargo, en experimentaciones preliminares observamos en algunos estudiantes sentimientos de comprensión, valoración positiva y mayor interés el aprendizaje de los contenidos de variable compleja, posesión y manejo apropiado de modelos metales reflejados en sus evaluaciones y entrevistas personales.

En cuanto a algunas dificultadas observadas, señalamos; la falta de conocimiento teórico y familiaridad con el contexto de electrostática ha sido un obstáculo para muchos estudiantes. Así también la carencia en nuestra institución de laboratorios de electrostática para experimentación debilita nuestra propuesta. Recurrimos prototipos caseros y videos sobre electrostática para apoyarla (Suarez y Vachetta, 2017). El modelo se limita solamente a problemas elementales con condiciones de frontera numéricas (no generales), también no comparte algunos conceptos y procesos con el algebraico tradicional. El aprendizaje de contenidos de electrostática y adquisición de habilidades para el uso de GeoGebra constituyen un aumento de carga cognitiva del estudiante (queja común de este) Y para su incorporación y aplicabilidad exitosa en nuestro curso requiere realizar cambios o modificaciones en la trayectoria tradicional de su enseñanza.

Finalmente, recomendamos su experimentación, determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que se generan. Sugerimos su uso reflexivo como herramienta complementaria a enfoques algebraicos tradicionales.

## Referencias y bibliografía

Bu et al. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra. En L. Bu y R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Modeling and simulations for learning and instruction* (Vol. 6, pp. 67-80). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-2_3.

Coffie, R. (2023). *2D Electrostatic Fields, A Complex Variable Approach*. CRC Press.

Flashman, M. (2022). *Mapping diagrams to visualize complex analysis* [Libro interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/Ni69jyKs

Ganguli, S. (2008) *Conformal Mapping and its Applications*. Recuperado el 30 de diciembre de 2024, de https://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/Ganguli.pdf.

Levi, M. (2023). Conformal Deformation of Conductors. *Newsjournal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 56*(3), [p. 4].

Levi, M. (2024). Electrical Resistance and Conformal Maps. *Newsjournal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 57*(3), [p. 7].

Schinzinger, R. y Laura, P. (2003). *Conformal Mapping, Methods and Applications*. Dover Publications.

Suarez, A. y Vachetta, M. (2017, 15 de diciembre). Visualizando líneas de campo [Video] Youtube. www.youtube.com/@electromagnetismocuanticay8051

Zill, D. y Shanahan, P. (2011). *Introducción al Análisis Complejo con Aplicaciones*. Cengage Learning.